

4.4.4 Další trigonometrické věty

Předpoklady: 040403

Př. 1: Zopakuj jakým způsobem můžeme co nejvýhodněji dopočítat zbývající strany a úhly v obecném trojúhelníku.

Pokud známe alespoň jednu dvojici *úhel + protější strana*, použijeme sinovou větu (pozor na dvě možná řešení).

Pokud ani jednu dvojici *úhel + protější strana* neznáme, použijeme nejdříve kosinovou větu, poté jako druhý dopočteme sinovou větou úhel proti menší straně.

Věty, které objevíme v této hodině, mohou usnadnit některé výpočty, ale je možné se bez nich (na rozdíl od kosinové a sinové věty) obejít.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady třída počítá najednou rozdělená do dvou skupin.

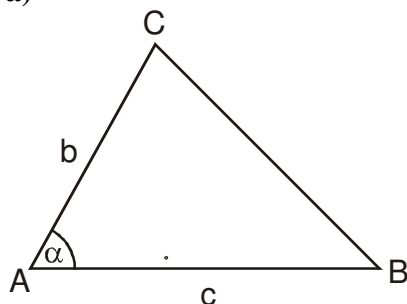
Př. 2: Urči obsah trojúhelníku ABC , jestliže platí:

a) $c = 14$; $b = 10,3$; $\alpha = 60^\circ 57'$,

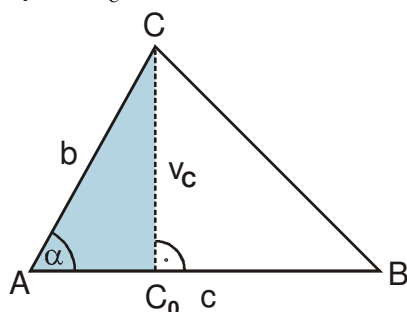
b) $c = 14$; $b = 10,3$; $\alpha = 119^\circ 3'$.

Nejdříve odvoď obecný vzorec a pak dosad'.

a)



Obsah trojúhelníka $S = \frac{c \cdot v_C}{2} \Rightarrow$ určíme výšku v_C .

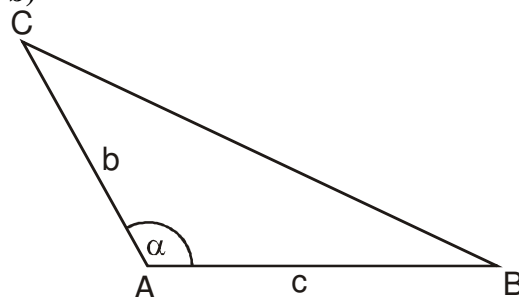


Z pravoúhlého trojúhelníka ACC_0 :

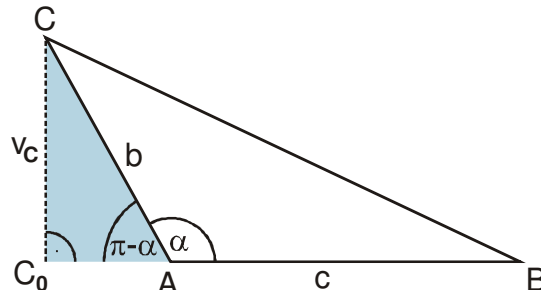
$$\sin \alpha = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = b \cdot \sin \alpha.$$

Dosadíme:

b)



Obsah trojúhelníka $S = \frac{c \cdot v_C}{2} \Rightarrow$ určíme výšku v_C .



Z pravoúhlého trojúhelníka ACC_0 :

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = b \cdot \sin(\pi - \alpha).$$

Dosadíme:

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Určíme obsah:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 14 \cdot \sin 60^\circ 57' = 63,03$$

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin(\pi - \alpha)}{2} = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha)$$

Určíme obsah:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 14 \cdot \sin(180^\circ - 119^\circ 3') = 63,03$$

Máme podobné vzorce a stejné výsledky $\Rightarrow$ asi to není náhoda.

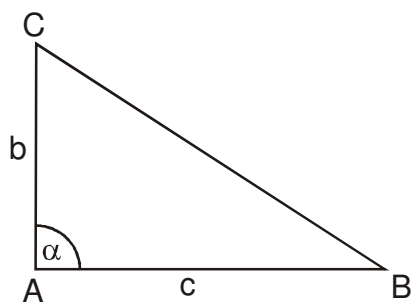
$$60^\circ 57' + 119^\circ 3' = 180^\circ \Rightarrow \sin 60^\circ 57' = \sin(180^\circ - 119^\circ 3')$$

$$\text{Navíc: } \sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \sin \alpha = \sin \alpha \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \Rightarrow \text{v obou případech jsme odvodili stejný vzorec}$$

Vzorec platí pro všechny ostroúhlé i tupouhlé trojúhelníky.

Př. 3: Rozhodni, zda vzorec z předchozího příkladu platí i pro trojúhelník s pravým úhlem α .



$$\text{V pravoúhlém trojúhelníku platí } v_c = b \Rightarrow S = \frac{bc}{2}.$$

$$\text{Dosadíme: } S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \sin 90^\circ = \frac{1}{2} bc \cdot 1 = \frac{bc}{2}.$$

Vztah platí i pro pravoúhlý trojúhelník.

$$\text{Tedy pro každý trojúhelník platí vzorec } S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Př. 4: Přepiš vzorec pro výpočet obsahu i pro další kombinace stran a úhlů.

Vzorec $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ umožňuje určit obsah trojúhelníku pomocí dvou stran a úhlu mezi nimi

$$\Rightarrow \text{další možnosti dvou stran a úhlu mezi nimi jsou } S = \frac{1}{2} ca \sin \beta \text{ a } S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α , β , γ a strany délky a ,

$$\text{b, c platí: } S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta.$$

Př. 5: V trojúhelníku ABC je dáno: $b = 6,7$; $\beta = 38^\circ$; $\gamma = 73^\circ$. Urči jeho obsah.

Pokud chceme použít předchozí vzorec pro obsah trojúhelníka, musíme určit dvě strany a úhel mezi nimi.

Snadno můžeme dopočítat stranu c (sinová věta):

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot b = \frac{\sin 73^\circ}{\sin 38^\circ} \cdot 6,7 = 10,41$$

Potřebujeme úhel mezi stranami b a c , tedy úhel α .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (38^\circ + 73^\circ) = 69^\circ$$

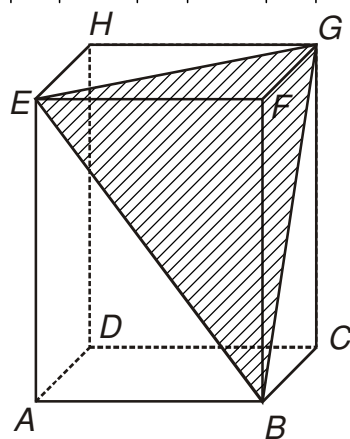
$$\text{Dosazení: } S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 10,41 \cdot \sin 69^\circ = 32,55$$

Obsah trojúhelníka ABC je 32,55.

Př. 6: Je dán kvádr $ABCDEFGH$ o délkách stran 2,3,4. Urči obsah trojúhelníku EBG .

Nakreslíme si kvádr, na označení v tomto případě nezáleží (strany trojúhelníka jsou stěnové úhlopříčky všech druhů obdélníků, které se na kvádru vyskytují). Zvolíme například toto:

$$|AB| = 3; |BC| = 2; |AE| = 4.$$



Pomocí Pythagorovy věty určíme délky jednotlivých stran trojúhelníku EBG .

- **Strana EB** (přepona v pravoúhlém trojúhelníku ABE):

$$|EB| = \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

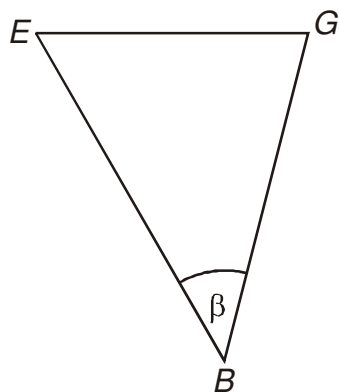
- **Strana BG** (přepona v pravoúhlém trojúhelníku BCG):

$$|BG| = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

- **Strana EG** (přepona v pravoúhlém trojúhelníku EGH):

$$|EG| = \sqrt{|GH|^2 + |EH|^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Tedy známe všechny strany v řešeném trojúhelníku:



Pokud chceme použít vzorec musíme vypočíst jeden z úhlů (například β) pomocí kosinové

$$\text{věty: } \cos \beta = \frac{|BE|^2 + |BG|^2 - |EG|^2}{2 \cdot |BE| \cdot |BG|} = \frac{5^2 + (2\sqrt{5})^2 - \sqrt{13}^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5}} = 0,7155 \Rightarrow \beta = 44^\circ 19'$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu:

$$S = \frac{1}{2} |BE| \cdot |BG| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} \sin 44^\circ 19' = 7,811$$

Obsah trojúhelníka BEG je 7,811.

Př. 7: Najdi v tabulkách vzorec, který by umožnil spočítat obsah trojúhelníku BEG (z předchozího příkladu) přímo z délek jeho stran bez určování velikosti vnitřního úhlu. Pomocí nalezeného vzorce obsah vypočti a porovnej výsledky.

Vzorec (Heronův) je v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35

$$\text{v tomto znění: } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Určíme } s: s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+2\sqrt{5}+\sqrt{13}}{2} \doteq 6,539$$

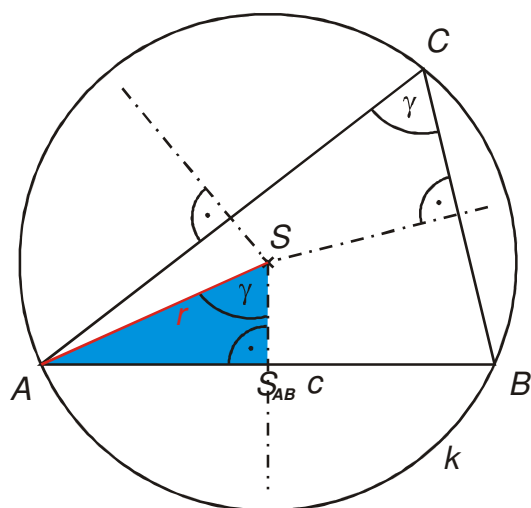
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{6,539 \cdot (6,539-5)(6,539-2\sqrt{5})(6,539-\sqrt{13})} = 7,811$$

Oba postupy vedou ke stejnému výsledku.

Kromě vzorců pro obsah trojúhelníka existují i vzorce pro výčet poloměru kružnice opsané a kružnice vepsané.

Př. 8: V trojúhelníku ABC známe: $|AB| = 12$ a $\gamma = 66^\circ$. Urči poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

Nakreslíme obrázek situace. Střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran.



Poloměr kružnice opsané spočteme z trojúhelníku ASS_{AB} . Je pravoúhlý a platí: $|AS| = r$;

$|AS_{AB}| = \frac{c}{2}$; $\sphericalangle ASS_{AB} = \gamma$ (je polovinou $\sphericalangle ASB$, který je kvůli větě o obvodovém a středovém úhlu dvojnásobkem úhlu γ).

$$\text{Platí } \sin \gamma = \frac{|AS_{AB}|}{|AS|} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} \Rightarrow r = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$$

$$\text{Dosadíme: } r = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{12}{2 \cdot \sin 66^\circ} = 6,568$$

Dodatek: Je dobré si uvědomit, že trojúhelník ABC není v předchozím příkladě zcela zadaný. Známe jen dvě velikosti, vrchol C by mohl ležet kdekoli na delším oblouku AB kružnice k . Trojúhelník by pak sice vypadal jinak, ale poloměr kružnice opsané by se nezměnil.

Př. 9: Napiš další možné varianty vzorce odvozeného v předchozím příkladě.

Poloměr kružnice opsané jsme počítali z úhlu a protější strany, platí tedy

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

Př. 10: Najdi v tabulkách další vzorce pro výpočet poloměrů kružnice opsané a vepsané.

Vzorce jsou v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35 v tomto znění:

$$\text{poloměr kružnice opsané: } r = \frac{abc}{4S},$$

$$\text{poloměr kružnice vepsané: } \rho = \frac{S}{s}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dodatek: Předchozí vzorce se někdy uvádějí ve tvarech: $S = \frac{abc}{4r}$, $S = \rho s$ jako vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku.

Př. 11: Urči obvod trojúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru 7 cm, jestliže jeho vnitřní úhly mají velikosti: $\alpha = 67^\circ$; $\beta = 81^\circ$.

Na první pohled neřešitelné. Hledáme nějaký vztah mezi poloměrem kružnice opsané a

velikostí strany $\Rightarrow r = \frac{a}{2 \sin \alpha} \Rightarrow a = r \cdot 2 \sin \alpha$.

Podobně můžeme vyjádřit i ostatní strany: $b = r \cdot 2 \sin \beta$; $c = r \cdot 2 \sin \gamma$.

$o = a + b + c = r \cdot 2 \sin \alpha + r \cdot 2 \sin \beta + r \cdot 2 \sin \gamma = 2r (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$.

Určíme úhel γ : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (67^\circ + 81^\circ) = 32^\circ$.

Dosadíme: $o = 2r (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 2 \cdot 7 \cdot (\sin 67^\circ + \sin 81^\circ + \sin 32^\circ) = 34,13$

Trojúhelník má obvod 34,13 cm.

Př. 12: Petáková:

strana 50/cvičení 96

strana 51/cvičení 100

strana 51/cvičení 105

Shrnutí: